

به نام خدا

مربوط به جشنواره طرح سوال ریاضی (۳)

بارم	www.elmgram.ir	سوالات	ردیف
۱/۲۵	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید.</p> <p>الف) اگر نقطه $A(1, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر A روی نمودار $y = -2f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$، نقطه $\left(\frac{1}{2}, -7\right)$ می باشد.</p> <p>ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط قطعاً صعودی است.</p> <p>پ) کمترین مقدار تابع $y = -4\cos(\pi x) + 2$ برابر -4 است.</p> <p>ت) اگر $f(x) = x$ باشد آن گاه $f'(0)$ وجود ندارد.</p> <p>ث) شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول محوری که بر آن عمود باشد، یک دایره است.</p>	<p>درست <input type="checkbox"/></p> <p>نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/></p> <p>نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/></p> <p>نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/></p> <p>نادرست <input type="checkbox"/></p>	۱
۱/۵	<p>در جای خالی کلمات مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) تابع $y = x + x$ در بازه ثابت می باشد.</p> <p>ب) اگر $f(3) = 4$ و $g(-1) = 4$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g$ به ازای $x = -1$ برابر می باشد.</p> <p>پ) باقی مانده تقسیم $-1 - 7x + 5x^2 - 3x^3$ بر $x - 1$ برابر است با</p> <p>ت) از دوران دایره حول هر یک از قطرهای آن بوجود می آید.</p> <p>ث) دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می کنیم، اگر بدانیم تاس سفید ۵ آمده است، احتمال این که مجموع دو تاس ۸ باشد، برابر است با</p>		۲
۱	<p>توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند، دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.</p>		۳
۲	<p>الف) جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را بدست آورید.</p> <p>ب) قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ رسم شده است، مقادیر a و b و c را بدست آورید.</p>		۴

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۵

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} =$

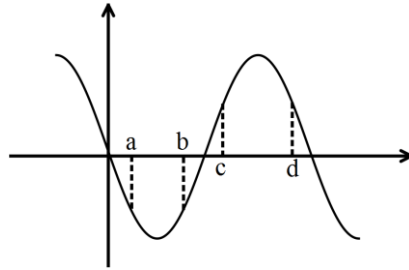
۱/۵

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} =$

با در نظر گرفتن نمودار f در شکل نقاط به طول‌های a و b و c و d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

۶

x	f'(x)
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲



۱

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 < x < 1 \\ 3x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

۷

ب) مشتق آن را در بازه $[0, 1]$ بررسی کنید.

الف) نمودار f را رسم کنید.

۱/۲۵

مشتق تابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نمی‌باشد)

۸

$$y = \sqrt{\left(\frac{2x^2 + x}{x}\right)^4}$$

۱

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - 5t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 4]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند؟

۹

۰/۷۵

تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

۱۰

الف) نقاط بحرانی تابع f را بیابید.

ب) نقاط اکسترمم و نوع اکسترمم‌ها را مشخص کنید.

۱/۵

۱	نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را در بازه $[-3, -1]$ بدست آورید.	۱۱
۱	با ۱۵۰ متر نرده، زمینی مستطیلی شکل را در کنار رودخانه‌ای محصور می‌کنیم، بیش‌ترین مساحت برای آن چیست؟	۱۲
۱/۲۵	شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه ۲ و $2\sqrt{3}$ واحد، حول وتر چه شکلی می‌باشد؟ حجم شکل حاصل را بدست آورید.	۱۳
۱/۵	کانون‌های یک بیضی نقاط $(2, 4)$ و $(2, -4)$ می‌باشد، مطلوب است : الف) فاصله کانونی ب) مختصات مرکز بیضی پ) معادله قطر بزرگ بیضی	۱۴
۱	دو دایره $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟	۱۵
۱/۵	در جعبه A، ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره را به تصادف از آن خارج می‌کنیم چقدر احتمال دارد ایم مهره سیاه باشد؟	۱۶
۲۰	« دلت را به خدا بسپار که دریایی از امید است، دلت پر امید »	

بارم	سؤالات	ردیف
۱/۲۵	(الف نادرست (ب نادرست (پ نادرست (ت درست (ث درست (هر مورد ۰/۲۵)	۱
۱/۵	(الف) $(-\infty, 0)$ (ب) $(0, 2.5)$ (پ) 4 (ت) 3 (ث) $1/6$ (کره) $(0, 2.5)$ (۰/۲۵)	۲
۱	$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ D_g = [0, +\infty) \end{cases} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $\{x \in [0, +\infty) \mid x \neq 1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$	۳
۲	<p>(الف) $\sin x \cos x = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} \frac{k \in \mathbb{Z}}{2}$</p> <p>$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$</p> <p>(ب) $T = \frac{4\pi}{3} \rightarrow T = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow b = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \rightarrow y = a \sin(\pm \frac{3}{2}x) + c$</p> <p>مقدار تابع به ازای $x = 0$، برابر یک است بنابراین:</p> <p>$x = 0 \rightarrow y = a \sin(0) + c = 1 \rightarrow c = 1$</p> <p>با فرض $b = \frac{3}{2}$، کمترین مقدار تابع برابر صفر است و این مقدار به ازای $\sin(\frac{3}{2}x) = -1$</p> <p>$\sin(\frac{3}{2}x) = -1 \rightarrow y = a(-1) + c = 0 \xrightarrow{c=1} -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1$</p> <p>$y = \sin(\frac{3}{2}x) + 1$</p>	۴
۱/۵	<p>(الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x}-4}{4(\cancel{x}-4)(x+4)} = \frac{1}{4 \times 8} = \frac{1}{32}$</p> <p>(ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$</p>	۵

۱	<table border="1"> <tr> <th>x</th> <th>f'(x)</th> </tr> <tr> <td>b</td> <td>۰/۵</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>a</td> <td>-۰/۵</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>-۲</td> </tr> </table>	x	f'(x)	b	۰/۵	c	۲	a	-۰/۵	d	-۲	هر قسمت (۰/۲۵)	۶
	x	f'(x)											
	b	۰/۵											
	c	۲											
	a	-۰/۵											
d	-۲												

۱/۲۵	$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 < x < 1 \\ 3x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$	(۰/۷۵)		الف) ۷
		(۰/۵)	ب) در بازه‌ی [۰, ۱] مشتق پذیر نیست زیرا در x=۱ مشتق ندارد.	

۱	$y' = \frac{4(\frac{2x^2+x}{x})^2 \cdot ((4x+1)x - (2x^2+x))}{2\sqrt{(\frac{2x^2+x}{x})^4}}$		۸
---	--	--	---

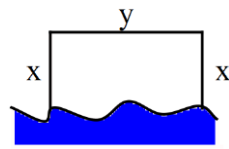
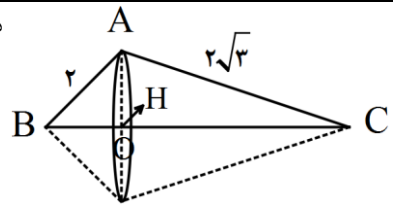
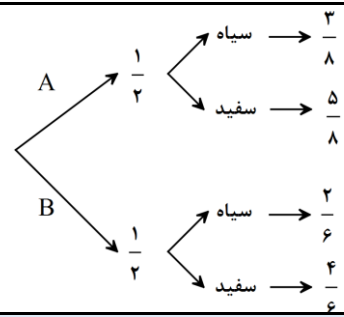
۰/۷۵	$f(t) = 2t^2 - 5t + 1 \quad [0, 4)$		۹
	$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{11 - 1}{4} = \frac{5}{2}$ (۰/۲۵)	$f'(t) = 4t - 5$ (۰/۲۵) $\rightarrow 4t - 5 = \frac{5}{2} \rightarrow 4t = 5 + \frac{5}{2} \rightarrow 4t = \frac{15}{2} \rightarrow t = \frac{15}{8} = 1/87$ (۰/۲۵)	

۱/۵	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$		الف) ۱۰
	$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \rightarrow (0, 1), (2, 3)$ (۰/۵)	نقاط بحرانی: (۰/۵)	ب)

x	۰	۲	
f'(x)	+	-	+
f(x)	□	۱□	-۳□

(۱) (۲, -۳) \rightarrow min نسبی و (۰, ۱) \rightarrow max نسبی

۱	$f(x) = x + \frac{4}{x} \rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} \rightarrow x + 2$ غ ق ق , $x = -2$, $x = 0$ غ ق ق (۰/۲۵)		۱۱
	$f(-3) = -3 + \frac{4}{-3} = -\frac{13}{3} = -4/.....$ (۰/۲۵)		
	$f(-2) = -2 - 2 = -4 \rightarrow$ مطلق max (۰/۲۵)		
	$f(-1) = -1 - 4 = -5 \rightarrow$ مطلق min (۰/۲۵)		

۱	 $2x + y = 150 \rightarrow y = 150 - 2x \rightarrow S = xy = x(150 - 2x) = -2x^2 + 150x \quad (0.25)$ $S' = -4x + 150 = 0 \rightarrow 4x = 150 \rightarrow x = \frac{150}{4} = \frac{75}{2} \quad (0.25)$ $y = 150 - 75 = 75 \quad (0.25) \rightarrow S_{\max} = 75 \times \frac{75}{2} = \frac{5625}{2} \quad (0.25)$	۱۲
۱/۲۵	<p>دوران یافته</p>  <p>دو مخروط با شعاع قاعده یکسان (۰/۲۵) ولی با ارتفاع‌های BH و CH</p> $V = \frac{1}{3} \pi r^2 (BH) + \frac{1}{3} \pi r^2 (CH) \quad (0.25)$ $\frac{1}{3} \pi r^2 (\underbrace{BH + CH}_{BC}) = \frac{1}{3} \pi r^2 (BC)$ $BC^2 = AB^2 + AC^2 = r^2 + (r\sqrt{3})^2 = 16 \rightarrow BC = 4 \quad (0.25)$ $AB \times AC = AH \times BC \rightarrow r \times r\sqrt{3} = AH \times 4 \rightarrow AH = \sqrt{3} \quad (0.25)$ $\rightarrow r = \sqrt{3} \rightarrow V = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 \times 4 = 4\pi \quad (0.25)$	۱۳
۱/۵	$FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (4+4)^2} = 8 \quad (0.5)$ <p>وسط دو کانون، مرکز بیضی است.</p> $O = \left(\frac{x_F + x_{F'}}{2}, \frac{y_F + y_{F'}}{2} \right) = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{-4+4}{2} \right) = (2, 0) \quad (0.5)$ <p>معادله قطر بزرگ $x = 2 \quad (0.5)$</p>	۱۴
۱	$O(3, 2), \quad O'(3, 2)$ $r = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 16 - 44} \quad , \quad r' = 2 \quad (0.25) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{8} = r = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad (0.25)$ $OO' = \sqrt{(3-3)^2 + (2-2)^2} = 0 \quad (0.25)$ <p>پس دو دایره هم مرکزند. (۰/۲۵)</p>	۱۵
۱/۵	$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{17}{48} = 16 \quad (1)$  <p>(۰/۵)</p>	۱۶
۲۰	« دلت را به خدا بسپار که دریایی از امید است، دلت پر امید »	